Chapitre XIII

ANALYSE VECTORIELLE.

Ce chapitre n'a aucun contenu physique, tout au moins pas beaucoup. Il introduit des outils mathématiques nécessaires à l'électromagnétisme, à la mécanique des fluides et à l'étude des phénomènes diffusifs. Il faut le considérer comme un chapitre de référence où l'on se replongera de temps à autre pour rafraîchir une notion oubliée.

XIII-1 Champs et opérateurs

Faisons simple : un champ est une fonction du point M et du temps t, ses valeurs peuvent être scalaires ou vectorielles (à 3 dimensions, bien sûr) ; selon le cas on dit avoir affaire à un champ scalaire ou vectoriel. Quelques exemples : les champs de pression et de température dans l'atmosphère, les champs électriques et magnétiques créés par des charges et des courants, etc.

Un champ qui ne dépend pas de M est dit uniforme et un champ qui ne dépend pas de t est dit stationnaire ou permanent.

Un opérateur transforme un champ en un autre champ : par exemple l'opérateur dérivée temporelle $\partial/\partial t$ qui au champ $f(M,t)$ associe le champ $\partial f/\partial t$.

XIII-2 Le gradient d'un champ scalaire

A un champ scalaire $f(x,y,z,t)$, l'opérateur gradient associe un champ vectoriel dont l'expression est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

où $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont les vecteurs de base du repère.

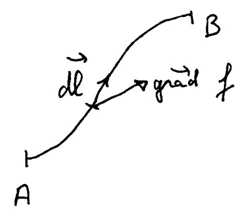
On introduit parfois le vecteur symbolique *nabla*, défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$$

alors on peut écrire $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \vec{\nabla} f$; on n'y verra pas autre chose qu'une notation pense-bête.

Une propriété importante du gradient est la suivante : soit une courbe orientée AB découpée en éléments infinitésimaux notés $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$, on a :

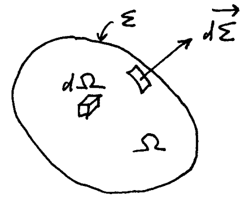
$$f(B) - f(A) = \int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}} f . \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$



En corollaire la différentielle de f *stationnaire* est $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f . \overrightarrow{\mathrm{d}l}$; pour f non stationnaire, il faut y rajouter $\partial f / \partial t . dt$

Une autre propriété importante, connue sous le nom de théorème du gradient, est la suivante : soit un volume Ω découpé en volumes élémentaires $\mathrm{d}\Omega$ et limité par une surface fermée Σ découpée en surfaces élémentaires auxquelles on associe des vecteurs surfaces $\mathrm{d}\vec{\Sigma}$ normaux, orientés vers l'extérieur et de norme égale à l'aire de la surface élémentaire, alors on a :

$$\oiint_\Sigma f \,\mathrm{d}\vec{\Sigma} = \iiint_\Omega \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \,\mathrm{d}\Omega$$



Prenons comme cas particulier le champ constant $f = 1$, on en déduit le corollaire :

$$\oiint_\Sigma \mathrm{d}\vec{\Sigma} = 0$$

Il est intéressant car il permet de simplifier certains calculs comme calculer le bilan des forces de pression atmosphérique sur un dôme hémisphérique. S'intercalera ici un petit exercice de cours.

XIII-3 Le rotationnel d'un champ vectoriel

A un champ vectoriel

$$\overrightarrow{V}(x,y,z,t) = V_x(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x} + V_y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y} + V_z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

l'opérateur rotationnel associe un autre champ vectoriel dont l'expression est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Avec le vecteur *nabla*, la notation pense-bête est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$

Un théorème important et sa réciproque :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) = \overrightarrow{0}$$

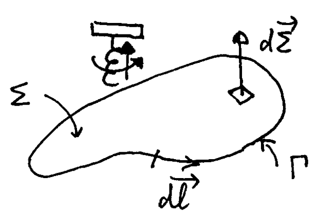
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \exists f : \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$$

Une formule utile :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\,\overrightarrow{V}) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \wedge \overrightarrow{V}$$

Un théorème très important : le théorème de STOKES. Soit une courbe fermée orientée Γ découpée en éléments infinitésimaux notés $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ et une surface Σ, de contour Γ, découpée en surfaces élémentaires auxquelles on associe des vecteurs surfaces $\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$ normaux, orientés par la règle du tire-bouchon à partir du sens de parcours de Γ, et de norme égale à l'aire de la surface élémentaire, alors on a :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$$



Remarque : $\mathcal{C} = \oint_\Gamma \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ s'appelle *circulation* de $\overrightarrow{V}$ le long de Γ.

XIII-4 La divergence d'un champ vectoriel

A un champ vectoriel

$$\overrightarrow{V}(x,y,z,t) = V_x(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x} + V_y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y} + V_z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

l'opérateur divergence associe un champ scalaire dont l'expression est :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Avec le vecteur *nabla*, la notation pense-bête est $\operatorname{div}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{V}$

Un théorème important et sa réciproque :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{V}) = 0$$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{W} = 0 \;\Rightarrow\; \exists\overrightarrow{V} : \overrightarrow{W} = \operatorname{rot}\overrightarrow{V}$$

Une formule utile :

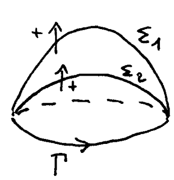
$$\operatorname{div}(f\,\overrightarrow{V}) = f\operatorname{div}\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f.\overrightarrow{V}$$

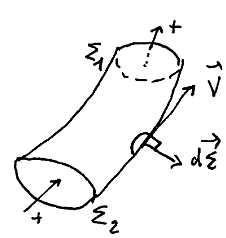
Un théorème très important : le théorème de Green-Ostrogradski. Soit un volume Ω découpé en volumes élémentaires $\mathrm{d}\Omega$ et limité par une surface fermée Σ découpée en surfaces élémentaires auxquelles on associe des vecteurs surfaces $\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$ normaux, orientés vers l'extérieur et de norme égale à l'aire de la surface élémentaire (schéma déjà vu plus haut), alors on a :

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\overrightarrow{V}\,\mathrm{d}\Omega$$

Remarque : $\Phi = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$ s'appelle *flux* de $\overrightarrow{V}$ à travers $\overrightarrow{V}$.

Trois conséquences primordiales pour les champs à divergence nulle :
– Le flux d'un tel champ à travers une surface fermée est nul.
– Soient deux surfaces ouvertes Σ_1 et Σ_2 de même contour Γ, orientées toutes deux dans le même sens par la règle du tire-bouchon. Notons $\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$ et $\Phi_2 = \iint_{\Sigma_2} \overrightarrow{V}.\mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma}$. Si l'on change l'orientation de Σ_2 donc le signe de Φ_2 et si l'on forme une surface fermée orientée vers l'extérieur, on a $\Phi_1 - \Phi_2 = 0$ donc les deux surfaces sont traversées par le même flux. (figure de gauche)
– Soit un tube de champ limité par deux surfaces Σ_1 et Σ_2, orientées dans le sens du tube. Le même type de démons-tration compte tenu que sur la surface latérale le flux est nul (vecteur tangent au tube donc orthogonal au vecteur surface) aboutit à la même conclusion : l'égalité des flux. On en déduira en particulier que si le tube s'évase, sa surface augmente, donc, à flux constant, le module du champ diminue. (figure de droite)





XIII-5 Laplacien d'un champ

A un champ scalaire $f(x,y,z,t)$, l'opérateur laplacien, noté Δ associe un champ scalaire dont l'expression est :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On lit "laplacien f".

On remarque aisément que :

$$\Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)$$

A un champ vectoriel

$$\overrightarrow{V}(x,y,z,t) = V_x(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x} + V_y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y} + V_z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

l'opérateur laplacien associe un autre champ vectoriel dont l'expression est :

$$\Delta\overrightarrow{V} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{V}}{\partial z^2}$$

de composantes ΔV_x, ΔV_y et ΔV_z.

Une formule utile :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\overrightarrow{V}) - \Delta\overrightarrow{V}$$

formule qui peut servir dans un sens ou l'autre pour transformer le rotationnel d'un rotationnel ou le gradient d'une divergence.

Dans le même esprit, à partir d'un champ vectoriel

$$\overrightarrow{A}(x,y,z,t) = A_x(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x} + A_y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y} + A_z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

et du vecteur formel nabla, on forme l'opérateur

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla} = A_x\,\frac{\partial}{\partial x} + A_y\,\frac{\partial}{\partial y} + A_z\,\frac{\partial}{\partial z}$$

(on lit «A scalaire nabla»). Appliqué à un champ scalaire f, il donne :

$$(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla})\,f = A_x\,\frac{\partial f}{\partial x} + A_y\,\frac{\partial f}{\partial y} + A_z\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

on reconnaît aisément que :

$$(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla})\,f = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$$

Appliqué à un vecteur $\overrightarrow{V}$, il donne :

$$(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla})\,\overrightarrow{V} = A_x\,\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial x} + A_y\,\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial y} + A_z\,\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial z}$$

Un cas particulier s'observe quand $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{V}$ sont le même champ ; on démontre alors une formule qui servira beaucoup en mécanique des fluides :

$$(\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla})\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}$$

XIII-6 Dérivées temporelles

Les fonctions rencontrées en physique sont assez agréables pour vérifier les hypothèses des théorèmes mathématiques, en particulier le théorème de SCHWARTZ qui indique que les dérivées secondes ne dépendent pas de l'ordre des dérivations, en particulier, on peut permuter dérivée temporelle et dérivées spatiales cachées dans les gradients, divergences, rotationnels, etc. d'où des théorèmes du style :

$$\mathrm{div}\left(\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\overrightarrow{V}\right)$$

et tout ce qu'on peut imaginer dans ce genre.

De même on peut permuter dérivée temporelle et intégration dans l'espace, *pourvu que le domaine d'intégration soit invariant dans le temps.* on aura, par exemple :

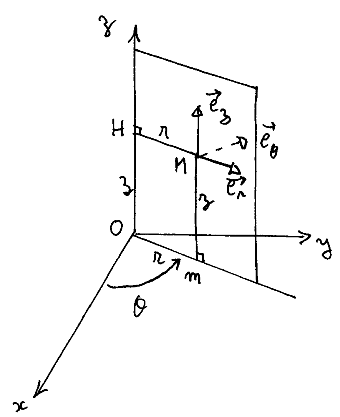
$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_\Omega f\,\mathrm{d}\Omega$$

On remarquera que l'intégrale sur Ω de f ne dépend plus que du temps d'où une dérivée droite pour les puristes.

XIII-7 Coordonnées cylindriques et sphériques

XIII-7.a Coordonnées cylindriques

Elles sont définies à partir d'un repère cartésien $Oxyz$ dont l'axe Oz est privilégié. Pour repérer un point M, on commence par tracer son *plan méridien*, c'est-à-dire le plan passant par Oz et le point M, il contient la projection H de M sur Oz et m projection de M sur xOy puis on donne $r = \|\overrightarrow{Om}\|$, $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$ et $z = \overline{OH}$.



Un vecteur dépendant du point M (un champ donc) est projeté sur une *base locale*, orthonormée directe, constitué des vecteurs unitaires suivants :

- $\overrightarrow{e_r}$, vecteur unitaire de $\overrightarrow{HM}$
- $\overrightarrow{e_\theta}$, vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ dans un plan parallèle à xOy

– $\overrightarrow{e_z}$

Il est hors de question d'apprendre par cœur l'expression de gradient, divergence, rotationnel et laplacien. Si cela figure ici, c'est en guise de formulaire, si un jour vous en aviez besoin. Mais avant de les utiliser, si le champ a suffisamment de symétries, un usage raisonné des théorèmes de STOKES et de GREEN-OSTROGRADSKI permet souvent de contourner la difficulté. Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ sur la base locale sont notées V_r, V_θ et V_z.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$$

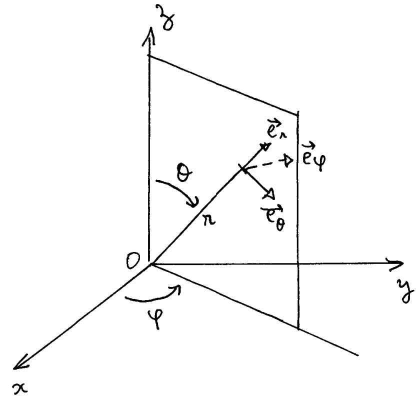
$$\text{div}\,\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\Delta\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

XIII-7.b Coordonnées sphériques

Dans le même contexte, le point M est repéré par $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$ et $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$.



On retrouve l'approche des géographes (latitude et longitude). Notez que le θ des cylindriques est devenu le φ des sphériques.

La base locale orthonormée directe est ici :
– $\overrightarrow{e_r}$, vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$
– $\overrightarrow{e_\theta}$, vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ dans le plan méridien
– $\overrightarrow{e_\varphi}$, identique au $\overrightarrow{e_\theta}$ des cylindriques
On a ici, en notant V_r, V_θ et V_φ les composantes de $\overrightarrow{V}$ sur la base locale :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\text{div}\,\overrightarrow{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,V_r) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\,V_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right)\,\overrightarrow{e_r} + \cdots$$

$$\cdots\left(\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_\varphi)\right)\,\overrightarrow{e_\theta} + \cdots$$

$$\cdots\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\Delta\,f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$